



לוגיקה ותיכנות לוגי - ביה"ס למדעי המחשב

בחינת סוף סמסטר ב', תש"ס - 16.6.00 - מועד א'

הוראות לנבחן:

- משך הבחינה שלוש שעות.
- אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון מלבד 4 דפי נוסחאות שיסופק יחד עם המבחן.
- רשום את תשובותיך **בגוף הבחינה** במקום המתאים לכל שאלה ושאלה. תוכל לכתוב גם על צידו השני של כל עמוד במידת הצורך.
- המחברת שקיבלת מיועדת לטיוטה בלבד והיא לא תיבדק!
- הקפד על כתב יד ברור, סדר הגיוני, ותשובות קצרות ככל האפשר. סידבול יתר יוריד נקודות!
- השאלון מכיל 6 שאלות ונפרש על פני 7 עמודים. משקלה של כל שאלה רשום ליד מספרה.

1. (10%) נגדיר את הקשר הלוגי \uparrow ע"י טבלת האמת הבאה:

p	q	$p \uparrow q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

האם ניתן להגדיר את הקשר הלוגי \rightarrow באמצעות הקשר \uparrow ?
אם תשובתך חיובית, רשום את ההגדרה בלבד.
אם תשובתך שלילית, תן נימוק קצר לכך
(אין צורך בהוכחה פורמלית מלאה).

תשובה:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 100\}$$

$$P = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, 99\}$$

$$Q = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots, 100\}$$

$$R = \{(x, y) \in U^2 \mid x + y \leq 100\}$$

2. נון מבנה U בשפת תחשיב הפרדיקאטים

כאשר P ו- Q פרדיקאטים חד-מקומיים,

R הוא יחס בינארי.

לגבי כל אחד מהפסוקים הבאים,

קבע אם הוא אמיתי או שקרי במבנה U .

תן נימוק קצר לקביעתך.

א. $\forall x \exists y [P_x \rightarrow (Q_y \wedge R_{xy})]$

ב. $\forall x [Q_x \rightarrow \exists y [P_y \wedge R_{xy}]]$

ג. $\exists x \forall y \forall z [(R_{xy} \wedge R_{xz}) \rightarrow y = z]$

ד. $\forall x \forall y \forall z [(R_{xy} \wedge R_{yz}) \rightarrow R_{xz}]$

תשובות:

1. $\exists x \exists y [P_x \wedge Q_y \wedge R_{xy}]$

2. $\forall x [P_x \rightarrow \neg R_{ax}]$

3. $\forall x [Q_x \rightarrow R_{ax}]$

3. לפניך קבוצה של שלושה פסוקים בתחשיב הפרדיקאטים.

אם קבוצת הפסוקים היא עקבית, מצא מבנה

מתאים המספק את כל הפסוקים בקבוצה.

אם קבוצת הפסוקים אינה עקבית,

הוכח סתירה לוגית מתוכה.

תשובה:

4. לפניך שלושה טיעונים בשפת תחשיב הפרדיקאטים. לגבי כל טיעון, אם הוא טיעון תקף, רשום הוכחה מלאה לתקפותו. אם אינו תקף, הוכח את אי-תקפותו על ידי מציאת מכונה מתאים.

1. $\forall x [A_x \leftrightarrow (B_x \vee C_x)]$.א

2. $\forall x [B_x \rightarrow C_x]$

$\forall x [A_x \rightarrow C_x]$

תשובה:

$$1. \forall x \forall y [(F_x \wedge G_y) \rightarrow (R_{xy} \vee \neg S_{yx})]$$

$$2. \forall x \forall y [S_{xy} \rightarrow \neg R_{yx}]$$

$$2. \exists x [S_{xx}]$$

$$\exists x [\neg F_x \vee \neg G_x]$$

ב.

תשובה:

1. $\exists x \exists y [x \neq y]$

2. $\exists x [A_x]$

3. $\forall x \forall y [(A_x \wedge B_y) \rightarrow C_{xy}]$

4. $\forall x [A_x \rightarrow B_x]$

$\exists x \exists y [C_{xy} \wedge x \neq y]$

תשובה:

5. בעיה בשפת PROLOG: כתוב את הפרדיקאט $average(L,A)$ המקבל כקלט רשימת מספרים שלמים L , מספר ממשי A , ומצליח רק אם A הוא הממוצע של איברי הרשימה L . לדוגמא:

?- $average([3,5,3,4,9],X)$.

$X=4.8$

תשובה:

6. (10%, בעיה בשפת PROLOG: כתוב את הפרדיקאט $larger(L1,N,L2)$ המקבל כקלט רשימת מספרים שלמים $L1$, מספר שלם N , ורשימת מספרים שלמים $L2$. הפרדיקאט מצליח רק אם $L2$ היא רשימת כל האיברים של $L1$ שהם גדולים יותר מ- N . דוגמא:

?- $larger([5,1,4,8,3,4,2,8],3,X)$.

$X=[5,4,8,4,8]$

תשובה:

בהצלחה!

חוקי 1-10

לכל טענה p . 1. $0 \vee p = p$. 2. $1 \wedge p = p$. 3. $-0 = 1$. 4. $-1 = 0$. 5. $1 \vee p = 1$. 6. $0 \wedge p = 0$.

חוקי אידמפוטנציה

לכל טענה p . 7. $p \vee p = p$. 8. $p \wedge p = p$.

חוקי שלילה

לכל טענה p מתקיים

9. $p \vee (\neg p) = 1$. 10. $\neg(\neg p) = p$. 11. $p \wedge (\neg p) = 0$.

חוקי זוג (דיסטריבוטיביות)

לכל טענות p, q, r מתקיים

12. $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$. 13. $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

חוקי קבוצ (אסוציאטיביות)

לכל טענות p, q, r מתקיים

14. $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$. 15. $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$.

חוקי הליף (קומוטטיביות)

לכל טענות p, q מתקיים

16. $p \vee q = q \vee p$. 17. $p \wedge q = q \wedge p$.

חוקי דה-מורגן

18. $\neg(\neg p) = p$. 19. $\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$. 20. $\neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$.

20. 772 - modus ponens $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

21. 772 - modus tollens $[(p \rightarrow q) \wedge (\neg q)] \rightarrow (\neg p)$

22. 772 - טרנזיטיביות $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

23. 772 - הפוך $p \wedge q \rightarrow q$, $p \wedge q \rightarrow p$.

24. כלל הקונטרפוזיציה $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q) \rightarrow (\neg p)$

25. כלל cut $[(p \vee q) \wedge (\neg p)] \rightarrow q$

26. כלל אקספורטציה $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [p \wedge q] \rightarrow r$

27. הגזרת גרירה $[p \rightarrow q] \leftrightarrow [(\neg p) \vee q]$

28. הגזרת שקילות $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

29. הגזרת שקילות $[(p \wedge q) \wedge (\neg p)] \leftrightarrow [p \wedge q] \vee [(\neg p) \wedge (\neg q)]$

30. עקרון הרזולוציה $(a \vee b) \wedge (\neg a) \vee c \rightarrow (b \vee c)$

1) ↑ - not And

$$\overline{(p \wedge q)} = \overline{(p \wedge q)}$$

→ - oric

$$\overline{p \wedge q}$$

$$p \wedge (p \wedge q) =$$

$$p \wedge \overline{(p \wedge q)}$$

$$\overline{p \wedge (p \wedge q)} =$$

$$\overline{p \wedge (p \wedge q)}$$

$$\overline{(p \wedge p) \wedge (p \wedge q)}$$

$$\overline{p \wedge q}$$

2) (10) $\forall x \exists y [P_x \rightarrow (Q_y \wedge R_{xy})]$

$$U = \{1-100\}$$

$$P = \{0, 2, 5, 10\}$$

$$Q = \{\text{even numbers}\}$$

$$R = \{(x, y) \in U^2 \mid x + y \leq 100\}$$

$$x = 99, \quad y = 95$$

$$\underbrace{99}_{\uparrow} \rightarrow \underbrace{(95 \wedge (95+99))}_{\circ} = \underline{\underline{0}} \quad \overset{>100}{\uparrow}$$

100/100

$$99 + y < 100$$

$$\textcircled{a} \forall x [Qx \rightarrow \exists y [Py \wedge Rxy]]$$

$$U = \{1, \dots, 100\}$$

$$P = \{ \text{prime numbers} \}$$

$$R = \{ x + y \leq 100 \}$$

$$Q = \{ \text{even numbers} \}$$

$$x = 100, \quad y = 99$$

$$100 + 99 \leq 100$$

\Downarrow

$$199 < 100$$

|| 0 || (f)

$$\textcircled{c} \exists x \forall y \forall z [(Rxy \wedge Rxz) \rightarrow (y=z)]$$

$$Rxy = x + y \leq 100$$

$$Rxz = x + z \leq 100$$

$$x = 99$$

$$99 + y \leq 100$$

$$99 + z \leq 100$$

$$\boxed{y = z = 1}$$

|| 0 ||

$$\textcircled{2} \quad \forall x \forall y \forall z [(R_{xy} \cap R_{yz}) \Rightarrow R_{xz}]$$

$$x=90 \quad y=5 \quad z=20$$

$$R_{xy} = 95$$

$$R_{yz} = 25$$

$$\Rightarrow R_{xz} = 110 \geq 100$$

110 > 100

$$\textcircled{3} \text{ 1. } \exists x \exists y [P_x \cap Q_y \cap R_{xy}]$$

$$\text{2. } \forall x [P_x \Rightarrow \overline{R_{xx}}]$$

$$\text{3. } \forall x [Q_x \Rightarrow R_{xx}]$$

$$U = \{1, 2, 3\} \quad \checkmark$$

$$P = 1 \quad \checkmark$$

$$Q = 2 \quad \checkmark$$

$$R = (1, 2) \quad (3, 2) \quad \checkmark$$

$$Q = 3 \quad \checkmark$$

(40)

1. $\forall x [A_x \rightarrow (B_x \cup C_x)]$

2. $\forall x [B_x \rightarrow C_x]$

$\forall x [A_x \rightarrow C_x]$

3. $A_x \rightarrow (B_x \cup C_x)$

(US(x/x, y/y), 1)

4. $B_x \rightarrow C_x$

(US(x/x, y/y), 2)

5. $\overline{(B_x \cup C_x)} \rightarrow \overline{A_x}$

(3, contr)

6. $(\overline{B_x} \cap \overline{C_x}) \rightarrow \overline{A_x}$

(5, De Morgan)

7. $\overline{B_x} \rightarrow (\overline{C_x} \rightarrow \overline{A_x})$

(6, export)

8. $\overline{(\overline{C_x} \rightarrow \overline{A_x})} \rightarrow B_x$

(7, Contr)

9. $\overline{(\overline{C_x} \rightarrow \overline{A_x})} \rightarrow C_x$

(8, 4, ~~11~~)

10. $(C_x \cup \overline{A_x}) \rightarrow C_x$

(9, contr)

11. $(\overline{C_x} \cap A_x) \rightarrow C_x$

(10, De Morgan)

12. $(\overline{C_x} \cap A_x) \cup C_x$

(11, distrib)

13. $(C_x \cup \overline{A_x}) \cup C_x$

(12, distrib)

14. $C_x \cup \overline{A_x}$

(13, id)

15. $\overline{C_x} \rightarrow \overline{A_x}$

(14, contr)

16. $A_x \rightarrow C_x$

(15, contr)

17. $\forall x [A_x \rightarrow C_x]$

(16, UG)

$$\textcircled{2} \quad 1. \forall x \forall y [(F_x \cap G_y) \rightarrow (R_{xy} \cup \overline{S_{yx}})]$$

$$2. \forall x \forall y [S_{xy} \rightarrow \overline{R_{yx}}]$$

$$3. \exists x [S_{xx}]$$

$$\exists x [\overline{F_x} \cup \overline{G_x}]$$

$$4. S_{aa} \quad (EP(x|a), 3)$$

$$5. (F_a \cap G_a) \rightarrow (R_{aa} \cup \overline{S_{aa}}) \quad (US(x|a, y|a), 1)$$

$$6. S_{aa} \rightarrow \overline{R_{aa}} \quad (US(x|a, y|a), 2)$$

$$7. F_a \rightarrow [G_a \rightarrow (R_{aa} \cup \overline{S_{aa}})] \quad (5, \text{export})$$

$$8. \overline{R_{aa}} \quad (4, 6, MP)$$

$$9. \overline{R_{aa}} \cap S_{aa} \quad (4, 8, \text{conj})$$

$$10. (\overline{R_{aa}} \cap S_{aa}) \rightarrow (F_a \cap G_a) \quad (5, \text{cont})$$

$$11. (\overline{R_{aa}} \cap S_{aa}) \rightarrow (\overline{F_a} \cup \overline{G_a}) \quad (10, \text{conj } 33)$$

$$12. \overline{F_a} \cup \overline{G_a} \quad (9, 11, MP)$$

$$13. \exists x [\overline{F_x} \cup \overline{G_x}] \quad (12, EG)$$

⑤

1. $\exists x \exists y [x \neq y]$

2. $\exists x [A_x]$

3. $\forall x \forall y [(A_x \wedge B_y) \rightarrow C_{xy}]$

4. $\forall x [A_x \rightarrow B_x]$

$$\exists x \exists y [C_{xy} \wedge x \neq y]$$

$$U = \{1, 2\}$$

$$A = 2$$

$$B = 2$$

$$C = (2, 2)$$